

(1) Представете символно следните изречения, като използвате символния език на модалната **пропозиционална** логика.

- 1) Не е необходимо Иван да дойде на срещата.
- 2) По необходимост всичко е крайно или безкрайно.
- 3) Ако е задължително да участваш в изборите, значи това ти е и позволено.
- 4) Пушенето е забранено в стаята, но е позволено в коридора.
- 5) Това не само е възможно, то е възможно по необходимост.
- 6) Това е необходимо, но не е необходимо по необходимост.
- 7) Ако това се е случвало някога, то ще се случи и в бъдеще.
- 8) Възможно е всичко да е крайно по необходимост.
- 9) Не е необходимо това да е необходимо, но то е възможно по необходимост.
- 10) Ако това е позволено да е задължително, то е задължително да е позволено.
- 11) Ако това се случи някога, винаги е било факт, че ще се случи.
- 12) Ако това се е случвало някога, винаги ще е факт, че се е случвало.
- 13) Ако това е необходимо, то е факт, а ако е факт, значи е и възможно.
- 14) Ако винаги е било факт, че това е щяло да се случи, то ще дойде момент, в който вече се е случило.
- 15) Това се е случвало, но е имало момент, в който не се е случвало.

(2) Следните двойки изрази би трябвало да са логически еквивалентни по връзката между модалните оператори. Наистина ли е така? Ако не е, променете един от модалните оператори в първия израз, така че да станат логически еквивалентни?

- | | |
|--|--|
| 1) $\neg \Box \alpha \quad \Diamond \neg \alpha$ | 6) $\neg \Diamond \Box \Box \alpha \quad \Box \Diamond \Box \neg \alpha$ |
| 2) $\neg \Diamond \neg \alpha \quad \neg \neg \Box \alpha$ | 7) $\Diamond \Diamond \neg \Box \Box \neg \alpha \quad \Diamond \Diamond \Diamond \alpha$ |
| 3) $\Box \neg \Box \Box \neg \alpha \quad \neg \Diamond \Box \neg \Box \alpha$ | 8) $\Diamond \Diamond \neg \Box \Box \neg \alpha \quad \neg \Box \Box \Box \neg \Box \alpha$ |
| 4) $\Box \neg \neg \Diamond \neg \alpha \quad \neg \Diamond \Box \alpha$ | 9) $\Diamond \Diamond \neg \Box \Box \neg \alpha \quad \Diamond \Diamond \Diamond \neg \Diamond \neg \alpha$ |
| 5) $\Box \neg \Box \Box \neg \alpha \quad \Box \Diamond \alpha$ | 10) $\Diamond \Diamond \Box \Box \neg \alpha \quad \neg \Box \Box \Box \Diamond \alpha$ |

Задачи към 4.1 Модални логики

(3) Докажете с диаграми, че следните изрази са логически валидни по отношение на семантичното правило **(1)**.

- | | |
|--|--|
| 1) $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ | 6) $\Diamond(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$ |
| 2) $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ | 7) $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\Box\Box\alpha$ |
| 3) $[\Box(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \Box\neg\beta] \rightarrow \neg\alpha$ | 8) $\Diamond(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\Diamond\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$ |
| 4) $(\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \vee \beta)$ | 9) $[\Box(\alpha \vee \beta) \wedge \Box(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge \Box(\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow \Box\gamma$ |
| 5) $[\Box(\alpha \vee \beta) \wedge \Box\neg\alpha] \rightarrow \Box\beta$ | 10) $\neg\Diamond(\alpha \vee \beta) \rightarrow \Box(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$ |

(4) Докажете с диаграми, че следните изрази са логически валидни (по отношение на семантичното правило **(2)**), без да се предявяват изисквания към релацията на достижимост:

- 1) $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$
- 2) $(\Box\alpha \wedge \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$
- 3) $\Box\alpha \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$
- 4) $(\Box\alpha \wedge \Diamond\beta) \rightarrow \Diamond(\alpha \wedge \beta)$
- 5) $\Box(\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \neg\Diamond(\neg\alpha \wedge \beta)$
- 6) $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta)$
- 7) $\Box\Box\alpha \rightarrow \Box(\Diamond\alpha \vee \Box\beta)$

(5) Докажете с диаграми, че следните изрази са логически валидни, когато релацията на достижимост е **рефлексивна**:

- 1) $\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$
- 2) $\Box\alpha \rightarrow \Diamond\Diamond\alpha$
- 3) $\Box(\Box\alpha \rightarrow \alpha)$
- 4) $\Box(\alpha \rightarrow \Diamond\alpha)$
- 5) $\Box\Box\Box\alpha \rightarrow \alpha$
- 6) $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \Diamond\beta)$
- 7) $[\Box(\neg\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \Box\beta)] \rightarrow \Diamond\beta$

(6) Докажете с диаграми, че следните изрази са логически валидни, когато релацията на достижимост е **транзитивна**:

- 1) $\Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$
- 2) $\Diamond\Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$
- 3) $\Box\alpha \rightarrow \Box\Diamond\Diamond\alpha$
- 4) $[\Diamond\Diamond\Diamond(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \Box\alpha] \rightarrow \Diamond\beta$
- 5) $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box(\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$
- 6) $\Box\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond\alpha$

(7) Докажете с диаграми, че следните изрази са логически валидни, когато релацията на достижимост е **симетрична**:

- 1) $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha$
- 2) $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$

(8) Докажете с диаграми, че следните изрази са логически валидни, когато релацията на достижимост е **симетрична и транзитивна**:

- 1) $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\alpha$
- 2) $\Box(\Box\alpha \vee \beta) \rightarrow (\Box\alpha \vee \Box\beta)$
- 3) $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

(9) Докажете с диаграми, че следните изрази са логически валидни, когато релацията на достижимост е **рефлексивна и транзитивна**:

- 1) $\Diamond\Diamond\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$
- 2) $(\Box\alpha \vee \Box\Box\Box\beta) \rightarrow (\Box\Box\Box\alpha \vee \Box\beta)^1$

¹ Решението изисква разглеждане на различни случаи.